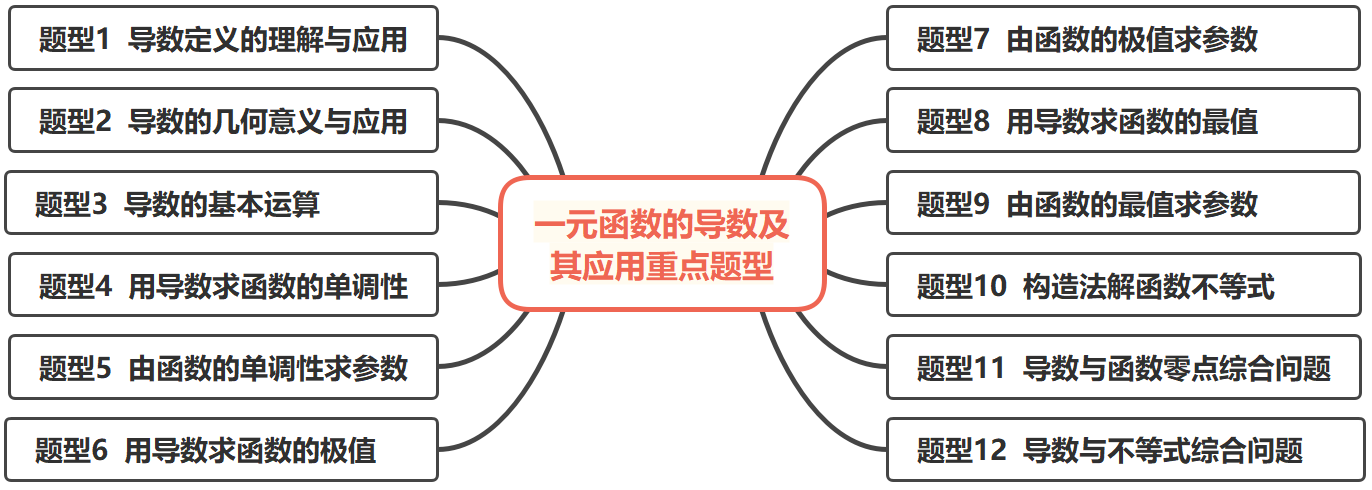
**第五章：一元函数的导数及其应用重点题型复习**



**题型一 导数定义的理解与运用**

【例1】已知是函数的导函数，若，则（ ）

A．4 B．2 C．8 D．

【答案】C

【解析】．故选：C*．*

【变式1-1】已知函数在处的导数为，则（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】由导数的定义和极限的运算法则，可得：



.故选：A.

【变式1-2】已知函数可导，且满足，则函数在处的导数为（ ）

A． B． C．1 D．2

【答案】A

【解析】因为，

所以，故选:A.

【变式1-3】若函数在处可导，且，则（ ）

A．1 B． C．2 D．

【答案】A

【解析】由导数定义可得，所以．故选：A．

【变式1-4】设函数在上可导，则（ ）

A． B． C． D．以上都不对

【答案】B

【解析】由导数的定义可知.故选：B.

**题型二 导数的几何意义与应用**

【例2】函数在处切线的斜率为（ ）

A．1 B．2 C．3 D．4

【答案】B

【解析】因为函数，

则，

所以，也即函数在处切线的斜率，故选：.

【变式2-1】已知函数.

（1）曲线在点处的切线方程；

（2）曲线过点的切线方程.

【答案】（1）；（2）

【解析】（1）因为，所以，又，

所以曲线在处的切线方程为，即；

（2）设切点为，则，

所以切线方程为，

因为切线过点，所以，

即，解得，

故所求切线方程为．

【变式2-2】已知，如果过点可作曲线的三条切线，则*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】，则过的切线为，即.

由过点可作曲线的三条切线得有3个不等实根.

令，，由得或.

当或，，单调递增；当，，单调递减；

故当时，函数取得极大值为；当时，函数取得极小值为.

要使有3个不等实根，则，即所求*m*的取值范围是.

【变式2-3】（多选）设为实数，直线能作为曲线的切线，则曲线的方程可以为（ ）

A． B． C． D．

【答案】ACD

【解析】因为直线能作为曲线的切线，所以有解，

对于A，由，得，由，得，解得，

所以直线能作为曲线的切线，所以A正确，

对于B，由，得，由，得，

化简得，因为，所以方程无解，

所以直线不能作为曲线的切线，所以B错误，

对于C，由，得，由，得，解得，

所以直线能作为曲线的切线，所以C正确，

对于D，由，得，由，得，解得，

所以直线能作为曲线的切线，所以D正确，选：ACD

【变式2-4】（多选）若两曲线与存在公切线，则正实数*a*的取值可能是（ ）

A．1.2 B．4 C．5.6 D．

【答案】ABD

【解析】由，则，由，则

设切线与曲线相切于点，则斜率为，

所以切线方程为，即①

设切线与曲线相切于点，则斜率为：，

则切线方程为，即，②

根据题意方程①，②表示同一条直线，则

所以，令（），

则，所以在上单调递增，在上单调递减，

，由题意.

**题型三 导数的基本运算**

【例3】求下列函数的导数．

（1）； （2）； （3）．

【答案】（1）；（2）；（3）

【解析】（1）因为，所以；

（2）因为，所以；

（3）因为，，

所以.

【变式3-1】已知，则（ ）

A． B． C．4 D．

【答案】C

【解析】因为，

所以，

所以．故选：C．

【变式3-2】已知，则（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】因为，

所以，所以，

解得，故选：B

【变式3-3】已知函数的定义域为，为的导函数，且，，若为偶函数，则下列结论不一定成立的是（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【解析】对A：∵为偶函数，则，两边求导可得

∴为奇函数，则

令，则可得，则，A成立；

对B：令，则可得，则，B成立；

∵，则可得

，则可得

两式相加可得：，

∴关于点成中心对称，则，D成立

又∵，则可得

，则可得

∴以4为周期的周期函数

根据以上性质只能推出，不能推出，C不一定成立.

**题型四 用导数求函数的单调性**

【例4】函数的单调递增区间是（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】，由，得，

所以函数的单调递增区间是．故选：D.

【变式4-1】函数的单调递增区间为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】函数的定义域为，，

令，得，解得，

故函数的单调递增区间为．故选：B．

【变式4-2】下列函数中，既是奇函数，又在上是单调函数的是（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】A：且定义域为R，为奇函数，

又，故单调递增，满足要求；

B：，不满足；

C：且定义域为R，为偶函数，不满足；

D：，不满足.故选：A

【变式4-3】已知函数.

（1）当时，求曲线在点的切线方程；

（2）讨论函数的单调性.

【答案】（1）；（2）答案见解析

【解析】（1）由，则，，

，，

切线方程：，则.

（2）由，

求导得，

①当时，，

，解得，，解得，

则：单减区间：，单增区间：；

②当时，令，解得或（舍去）

当时，，当时，，

则：单减区间：，单增区间：；

③当时，令，解得或，

当时，，当时，，

则：单减区间：和，单增区间：；

④当时，，则：单减区间：；

⑤当时，令，解得或，

当时，，当时，，

则：单减区间：和，单增区间：；

综上，当时，单减区间：，单增区间：

当时，单减区间：和，单增区间：

当时，单减区间：

当时，单减区间：和，单增区间：.

**题型五 由函数的单调性求参数**

【例5】若函数在区间上单调递增，则实数*a*的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】依题意在区间上恒成立，

即在区间上恒成立.

令，则，

所以在上单调递增，则，所以.故选:B.

【变式5-1】设函数，若函数在区间上是单调函数，求实数*m*的取值范围.

【答案】

【解析】，，

令，解得或，

令，解得.

故在上严格增，在上严格减，在上严格增.

又在区间上是单调函数，

则只需，解得.

故实数*m*的取值范围为.

【变式5-2】已知函数．若在内不单调，则实数*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】由，得，

当在内为减函数时，则在内恒成立，

所以在内恒成立，

当在内为增函数时，则在内恒成立，

所以在内恒成立，

令，因为在内单调递增，在内单调递减，

所以在内的值域为，所以或，

所以函数在内单调时，*a*的取值范围是，

故在上不单调时，实数*a*的取值范围是．

【变式5-3】已知函数在其定义域内的一个子区间上不单调，则实数的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】由题意得，

令，解得或（舍），

当时，，则为减函数，

当时，，则为增函数，

所以在处取得极小值，

所以，解得，

又为定义域的一个子区间，所以，解得，

所以实数的取值范围是.故选：A

**题型六 用导数求函数的极值**

【例6】函数的极大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】的定义域是，，

令解得，

所以，在区间递增；

在区间递减；

所以的极大值为.

【变式6-1】已知函数

（1）求在处的切线的方程.

（2）求的单调区间和极值.

【答案】（1）；

（2）增区间为，减区间；极大值为极小值.

【解析】（1）因为，故可得，

，，

故在处的切线的方程为：，即.

（2）因为，

令，解得；令，解得；

则在单调递增，在单调递减，在单调递增，

故的单调增区间为，单调减区间，

且的极大值为的极小值为.

【变式6-2】设函数

（1）求曲线在处的切线方程；

（2）设，求函数的极值．

【答案】（1）；（2）极大值为；极小值为．

【解析】（1）∵，∴

∴切线的斜率

又切点的坐标为，即

∴切线的方程，即

（2）∵

∴

令，则，解得或

列表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  | 3 |  |
|  | 正 | 0 | 负 | 0 | 正 |
|  | 单调递增 |  | 单调递减 |  | 单调递增 |

∴当时，取得极大值为；

当时，取得极小值为．

【变式6-3】已知函数在处的切线方程为．

（1）求、的值；

（2）求的极值点，并计算两个极值之和．

【答案】（1），

（2）极大值点为，极小值点为，极大值与极小值的和为

【解析】（1）因为的定义域为，，

因为，曲线在处的切线方程为，

，可得，，可得.

（2）由，得，

列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

所以，函数的极大值点为，极大值为，

极小值点为，极小值为，

所以，函数的极大值和极小值为.

**题型七 由函数的极值求参数**

【例7】已知是函数的极小值点，则的极大值为（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【解析】因为，则，由题意可得，

解得，，，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | 增 | 极大值 | 减 | 极小值 | 增 |

所以，函数的极大值为.故选：C.

【变式7-1】函数在处有极值为，那么，的值为（ ）

A．， B．， C．，或， D．，

【答案】A

【解析】，

由题意可知即，

则解得或，

当时，，

在处不存在极值，不符合题意；

当时，，

，，，，符合题意．

，故选：A*．*

【变式7-2】已知函数，则“”是“函数在处有极值”的（ ）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分又不必要条件

【答案】B

【解析】因为，所以，

所以，解得或；

当时，，

即函数在定义域上单调递增，无极值点，故舍去；

当时，，

当或时，当时，满足函数在处取得极值，

所以，

所以由推不出函数在处有极值，即充分性不成立；

由函数在处有极值推得出，即必要性成立；

故“”是“函数在处有极值”的必要不充分条件；故选：B

【变式7-3】已知有极大值和极小值，则的取值范围为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】由可得，

因为有极大值和极小值，所以有两个不相等的实数根，

所以，即，解得：或，

所以的取值范围为，故选：D.

【变式7-4】已知函数有唯一的极值点，则的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】求导有，

因为函数有唯一的极值点，

所以，有唯一正实数根，

因为，所以在上无解，

所以，在上无解，

记，则有，

所以，当时，，在上递减，

当时，，在上递增．

此时时，有最小值，

所以， ，即，

所以，即的取值范围是，故选：A

**题型八 用导数求函数的最值**

【例8】函数的最小值为（ ）

A． B． C．-1 D．0

【答案】C

【解析】由题意，函数的定义域为，关于原点对称，

且满足，所以为偶函数，

当时，，

可得，在单调递增，

又由为偶函数，所以在单调递减，单调递增，

所以.故选：C.

【变式8-1】已知函数，若在点处的切线方程为．

（1）求，的值；

（2）求函数在上的最大值．

【答案】（1），；（2）

【解析】（1）因为，所以，

由题意得，所以，；

（2）由（1）得，，

因为，

当时，，函数单调递增，

当时，，函数单调递减，

当时，，函数单调递增，

故当时，函数取得极大值，

又，，

因为

故函数在上的最大值为．

【变式8-2】已知函数．

（1）求的单调区间及极值；

（2）求在区间上的最值．

【答案】（1）单调增区间为，单调减区间为和；极小值；极大值

（2）最大值为；最小值为

【解析】（1）函数的定义域为**R**，．

令，得或．

当变化时，，的变化情况如表所示．

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  | 3 |  |
|  |  | 0 |  | 0 |  |
|  | 单调递减 |  | 单调递增 |  | 单调递减 |

故的单调增区间为，单调减区间为和．

当时，有极小值；当时，有极大值．

（2）由（1）可知，在上单调递增，在上单调递减，

所以在上的最大值为．

又，，，

所以在区间上的最小值为．

【变式8-3】已知函数．

（1）若函数*f*（*x*）在*x*=－1处取得极值，求实数*a*的值；

（2）当时．求函数*f*（*x*）的最大值．

【答案】（1）*a*=1；（2）答案见解析

【解析】（1）由题意可知，

所以，即3-3*a*=0解得*a*=1，

经检验*a*=1，符合题意．所以*a*=1．

（2）由（1）知，

令，，

当即时，*f*（*x*）和随*x*的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | －2 |  |  |  |  |  | 1 |
|  |  | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ |  |
|  | －7+6*a* | 单调递增 |  | 单调递减 |  | 单调调增 | 2－3*a* |

，

由上可知，所以的最大值为．

当即时，*f*（*x*）和随*x*的变化情况如下表：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | －2 |  |  |  | 1 |
|  |  | ＋ | 0 | － |  |
|  | －7+6*a* | 单调递增 |  | 单调递减 | 2－3*a* |

，

由上可知，所以*f*（*x*）的最大值为．

当即时，恒成立，即*f*（*x*）在［－2，1]上单调递减，

所以*f*（*x*）的最大值为*f*（－2）=－7+6*a*，

综上所述，当时，*f*（*x*）的最大值为；

当时，*f*（*x*）的最大值为－7+6*a*．

**题型九 由函数的最值求参数**

【例9】若函数在区间内有最小值，则实数*m*的取值范围是（ ）

A． B． C． D．

【答案】C

【解析】由题得，.

令，解得或；令，解得，

所以在区间内单调递增，

在区间内单调递减，在区间内单调递增，

所以函数的极小值.

若在区间内有最小值，则极小值即最小值，

所以，解得，

令，可得，可得，解得或1，

由题得，综上.故选：C.

【变式9-1】（多选）若函数*f*(*x*)＝3*x*－*x3*在区间(*a2*－12，*a*)上有最小值，则实数*a*的可能取值是（ ）

A．0 B．1 C．2 D．3

【答案】ABC

【解析】因为函数*f*(*x*)＝3*x*－*x3*，所以，

令，得，

当或时，，当时，，

所以当时，取得极小值，

则，解得，

又因为在上递减，且，所以，

综上：，所以实数*a*的可能取值是0，1，2故选：ABC

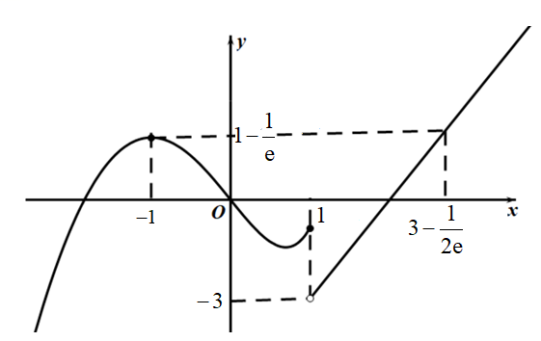
【变式9-2】已知函数，当时，，则实数*m*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】当时，，

令，则或；，则，

函数在上单调递减，在单调递增，

函数在处取得极大值为，

在出的极小值为.

当时，令，解得

综上所述，的取值范围为

【变式9-3】已知函数

（1）若，求在定义域内的极值；

（2）若在上的最小值为，求实数*a*的值．

【答案】（1）答案见解析；（2）*a*＝－.

【解析】（1）由题意得的定义域是，且，

因为，所以，故在上单调递增，无极值；

当，时，单调递增，

时，单调递减，

所以在有极小值，无极大值；

（2）由（1）可得，因为，

①若，则，即在上恒成立，

此时在上单调递增，所以，所以（舍去）；

②若，则，即在上恒成立，

此时在上单调递减，所以，

所以（舍去）．

③若，令，得，

当时，，所以在上单调递减；

当时，，所以在上单调递增，

所以，所以.综上，.

**题型十 造法解函数不等式**

【例10】设是函数的导函数，且，则不等式的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】令，则，

，，

在上单调递减，

由可得，即，，解得.

故不等式的解集为.

【变式10-1】已知定义在上的连续偶函数的导函数为，当时，，且，则不等式的解集为（ ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】当时，，∴，

令，∴在上单调递减，

又是定义在上的连续偶函数，

∴是上的奇函数，即在上单调递减，

∵，∴，

当，即时，，

∴；

当，即时，，

∴，则.

故不等式的解集为.故选：A.

【变式10-2】已知函数是定义在的奇函数，当时，，则不等式的解集为（ ）

A． B． C． D．

【答案】D

【解析】令，

当时，，当时，，

在上单调递减；

又为的奇函数，

，即为偶函数，

在上单调递增；

又由不等式得，

当，即时，不等式可化为，即，

由在上单调递减得，解得，故；

当，即时，不等式可化为，即，

由在上单调递增得，解得，故；

综上所述，不等式的解集为：．故选：D．

【变式10-3】定义在上的函数满足，且，则不等式的解集为（ ）

A． B． C． D．

【答案】B

【解析】令，

因为定义在上的函数满足，

所以，所以在上单调递增，

因为，所以，

所以不等式可转化为，即，

所以e*x*＞10，所以*x*＞ln10，

所以不等式的解集为.故选：B.

**题型十一 导数与函数零点的综合问题**

【例11】已知函数，.

（1）求函数的极值；

（2）当时，判断函数在上零点个数.

【答案】（1）答案见解析；（2）两个

【解析】（1）由知定义域为，

①当时，在上 ，故单调递减，所以无极值.

②当时，由得:，

当时，当时，.

所以函数有极小值为，无极大值.

（2）当时，，，

当时，，

当时，单调递增，且，，

故在上存在使得，而当时，.

所以在上单调递减，在上单调递增，

且，，

所以，又，

故由零点的存在性定理在上存在一个零点，

在上也存在一个零点.

所以在上有两个零点.

【变式11-1】若函数恰有2个不同的零点，则实数*m*的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】或

【解析】因为恰有2个不同零点，

故函数与，恰有2个交点，

对于，，由，得或，

由，得，

所以当变化时，变化如下：

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  | + | 0 |  | 0 | + |
|  |  | 极大值 |  | 极小值 |  |

因为与恰有两个交点，又，，

故，或，

所以或.

【变式11-2】已知函数，若函数恰有三个零点，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】当时，，

，在上恒成立，且在时，等号成立，

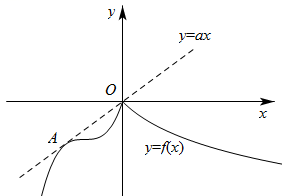
所以在上单调递增，且，

当时，单调递减，且，

函数恰有三个零点，可转化为函数与有三个交点，

画出的图象，所图所示：

设直线与，相切时切点为，

则，

又根据斜率公式可得：，

所以，解得：或，

当时，，

当时，，

所以要想函数与有三个交点，

直线斜率要介于两切线斜率之间，故

【变式11-3】已知函数．

（1）若，求的极大值；

（2）若在区间上有两个零点，求实数*a*的取值范围．

【答案】（1）0；（2）．

【解析】（1）当时，，且

则．

当时，，所以在上单调递增；

当时，，所以在上单调递减，

所以的极大值为．

（2）由题意得

当时，对恒成立，

所以在区间上单调递增，

又，所以在区间上仅有一个零点，不符合题意．

当时，令，得，

若，即时，对恒成立，

在区间上单调递减，

又，所以在区间上仅有一个零点，不符合题意．

若，即时，

在区间上单调递增，在区间上单调递减．

令，则，

所以在区间上单调递减，

所以，即，所以，

其中，

因为函数的图像开口向下，

所以，使，即在区间上有两个零点．

综上，实数*a*的取值范围为．

**题型十二 导数与不等式综合问题**

【例12】已知函数．

（1）求的极值；

（2）设，求证：当时，．

【答案】（1）极小值，无极大值；（2）证明见解析

【解析】（1），由得．

当*x*变化时，，的变化如下表所示：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | 1 |  |
|  |  | 0 |  |
|  | ↙ | 极小值 | ↗ |

由上表可知在处取得极小值，无极大值．

（2），令，

，

所以在单调递减，所以当时，．

所以当时，，即，

故当时，．

【变式12-1】已知函数，

（1）求在处的切线方程

（2）若存在时，使恒成立，求的取值范围．

【答案】（1）；（2）

【解析】（1）由，可得，

所以切线的斜率，．

所以在处的切线方程为，即；

（2）令，则，

令，，

在上，，

在上单调递增，

，

．

【变式12-2】已知函数．

（1）当时，求函数的单调区间；

（2）对任意的，当时都有，求实数的取值范围．

【答案】（1）在上单调递增，在上单调递减；（2）

【解析】（1）定义域为，．

当时，由，解得：，

由，解得：．

即在上单调递增，在上单调递减．

（2），即．

令，则可知函数在上单调递增．

所以在上恒成立．

即在上恒成立，只需，

设，，

在单调递增．

所以．

综上所述，实数的取值范围为．

【变式12-3】已知函数，.

（1）讨论函数的单调性；

（2）若，不等式恒成立，求实数的取值范围.

【答案】（1）答案见解析；（2）

【解析】（1）函数的定义域为，

所以.

当时，，所以在上单调递增；

当时，令得，令得，

所以在上单调递减：在上单调递增.

综上，当时，函数在上单调递增；

当时，在上单调递减，在上单调递增.

（2）因为对恒成立，

即对恒成立.

设，其中，

所以，，

设，其中，则，

所以，函数在上单调递增.

因为，，

所以，存在，使得，

当时，，函数单调递减，

当时，，函数单调递增，

所以.

因为，则，

设，其中，则，

所以函数在上为增函数，

因为，则，则，

由可得，所以，

所以，可得，

所以，所以.

所以实数*a*的取值范围为.